复旦大学

2024～2025 学年第一学期期中考试试卷

☑A 卷　　□B 卷

课程名称：线性代数　　课程代码：COMP120004.08

开课院系：信息科学与工程学院　　考试形式：闭　卷

姓　名：　　　　学　号：　　　　专　业：

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题　　号	一	二	三	总分
得　　分	[redacted]			

一、填空题 (28 分, 每小题 4 分)

1. 排列 (1423) 的逆序数是__________.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} =$ [redacted]

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是线性__________(填"相关"或"无关")的.

4. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$ 的解是 [redacted]

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$ ______

6. 以下命题正确的有______

(1). 若一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 3×5 的实矩阵, 那么映射 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Ax}$ 作为从 $\mathbb{R}^3$ 映到 $\mathbb{R}^5$ 的映射一定不是双射.

(2). 方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的各个列向量线性无关.

(3). 如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的最简阶梯形矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量张成的空间和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量张成的空间相同.

(4). 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|2\boldsymbol{A}| = 2|\boldsymbol{A}|$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是个 2024 阶实方阵, 满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{O}$. 求 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ 的所有可能取值_ [redacted] [redacted]

二、计算题 (共 36 分)

1. (12 分) 已知实数 $\alpha \neq 0$, 计算下列 n 阶行列式

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}
1 & x_1(x_1-\alpha) & x_1^2(x_1-\alpha) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-\alpha) \\
1 & x_2(x_2-\alpha) & x_2^2(x_2-\alpha) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-\alpha) \\
1 & x_3(x_3-\alpha) & x_3^2(x_3-\alpha) & \cdots & x_3^{n-1}(x_3-\alpha) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n(x_n-\alpha) & x_n^2(x_n-\alpha) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-\alpha)
\end{vmatrix}
$$

2. (12 分) 当 a,b 为何值时，下列实的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + ax_3 + \cdots + ax_n = b \\ ax_1 + x_2 + ax_3 + \cdots + ax_n = b \\ ax_1 + ax_2 + x_3 + \cdots + ax_n = b \\ \cdots \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 + \cdots + \end{cases}$$ [redacted] $x_n = b$

有无穷多组解，并写出对应条件下方程的通解。

3. (12 分) 设 $\mathbb{R}^4$ 上有实向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

(1). (6 分) 求该向量组的一个极大无关组.

(2). (6 分) 向量 $\boldsymbol{\beta} = (0,1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 请将其写成 (1) 中所求极大无关组的线性组合. [redacted]

三、解答题 (36 分)

1. (12 分) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶实方阵, 回答以下问题

(1). (6 分) 若 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.

(2). (6 分) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是对称矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 也是对称矩阵.

注. 一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的, 是指对任何 $1 \le i, j \le n$, 都有 $a_{ij} = a_{ji}$.

[redacted]

2. (12 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵, 回答以下问题

(1). (6 分) 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_n) = n$.

(2). (6 分) 设 $f(x)$ 是一个复系数多项式, 其有 m 个复根 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 复根 x_j 的重数为 p_j. 若 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$, 证明 $\sum\limits_{j=1}^{m} \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - x_j \boldsymbol{I}_n)^{p_j} = n$. 并举例说明, 指数上的 p_j 是必要的, 即找出反例说明, 可以存在多项式 $f(x)$ 和一个 $\boldsymbol{A}$, 使得 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ 但 $\sum\limits_{j=1}^{m} \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - x_j \boldsymbol{I}_n) \neq n$.

注. 本题如果有把握完整正确回答第 (2) 问, 可直接跳过第 (1) 问, 只要第 (2) 问的回答正确, 自动视为本题满分.

[redacted]

3. (12 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵, 且对每个 $k=1,2,\cdots,n$, 都存在列向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_k=k\boldsymbol{\alpha}_k$

(1). (3 分) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(2). (3 分) 设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 , \boldsymbol{\alpha}_2 , \cdots , \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

(3). (3 分) 证明 $\{\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\}$ 线性无关, 但 $\{\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^n\}$ 线性相关.

(4). (3 分) 证明 n 阶复方阵 $\boldsymbol{B}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的充要条件是存在复系数多项式 $f(x)$, 使得 $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$.

提示. 第三题后者线性相关因为你可以证明 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_n)\cdots(\boldsymbol{A}-n\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{O}$. 第四题矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可交换是指 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 它也等价于 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 可交换.